VEROVATNOĆA - ZADACI (II DEO)

Klasična definicija verovatnoće

Verovatnoća događaja A jednaka je količniku broja povoljnih slučajeva za događaj A i broja svih mogućih slučajeva.

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}}$$

n je broj svih mogućih slučajeva

m je broj povoljnih slučajeva

$\boxed{PRIMER\ 1.}$

Odrediti verovatnoću da bačena kocka za igru na gornjoj strani pokaže paran broj.

Rešenje:

A: "pao je paran broj"

Da još jednom ponovimo savet iz prvog dela: uvek kad možete, skicirajte problem i napišite sve mogućnosti!

1	2	3	4	5	6

Jasno je da je broj svih mogućnosti $n=6$

1	2	3	4	5	6

Povoljno je da padne: 2,4 ili 6 (paran broj), pa je onda $m=3$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$\boxed{PRIMER\ 2.}$

Kolika je verovatnoća da će se na dvema bačenim kockicama pojaviti zbir 9 na gornjoj strani?

Rešenje:

A: "pao je zbir 9"

Već smo videli u prethodnom fajlu da se broj svih mogućnosti izračunava:

$$n = \overline{V}_2^6 = 6^2 = 36$$

Da vidimo šta je nama povoljno:

1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Imamo četiri povoljne mogućnosti , pa je $m = 4$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$\boxed{PRIMER\ 3.}$

Kolika je verovatnoća da pri bacanju dva novčića padne bar jedan grb?

Rešenje:

Kad u zadatku kaže "bar jedan", to znači da nam je povoljno da padne jedan ali i oba grba!

A: "pao je bar jedan grb"

P	P	P	P
P	G	P	G
G	P	G	P
G	G	G	G
n=4		m=3	

Verovatnoća je $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$

Ovaj zadatak smo mogli da rešimo i na drugi način, koji se često koristi kad u formulaciji zadatka imamo reči "bar jedan".

Posmatramo suprotan događaj događaju A: "pao je bar jedan grb".

To će biti $\overline{A}$, koje znači da nije pao nijedan grb (odnosno, pala su dva pisma)

n=4 m=1

$$P(\overline{A})=\frac{m}{n}=\frac{1}{4}$$

Dalje koristimo:

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$
$$P(A)=1-P(\overline{A})$$
$$P(A)=1-\frac{1}{4}$$
$$P(A)=\frac{3}{4}$$

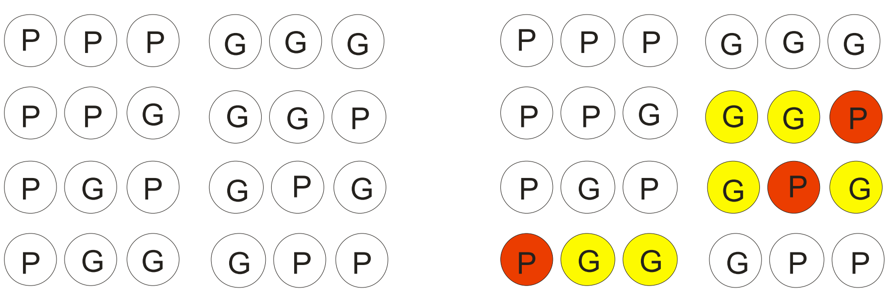
$\boxed{PRIMER\ 4.}$

Odrediti verovatnoću da pri istovremenom bacanju tri novčića padne tačno jedno pismo.

<u>Rešenje:</u>

A: "palo je tačno jedno pismo"

Ovde nam traže konkretno da bude samo jedno pismo na tri novčića, pa nam nije povoljno da budu dva pisma ili sva tri...



n=8 m=3

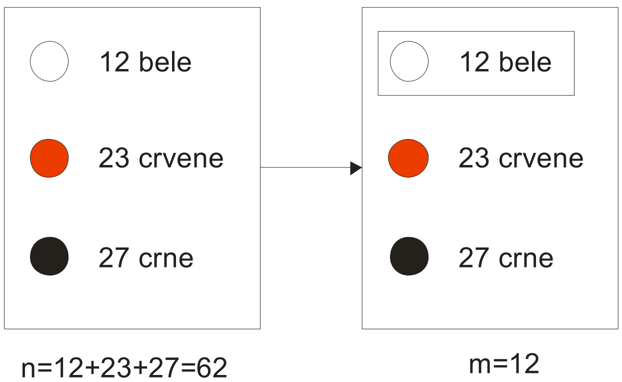
$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{8}$$

$\boxed{PRIMER\ 5.}$

U posudi se nalazi 12 belih, 23 crvene i 27 crnih kuglica. Odrediti verovatnoću da izvučemo belu kuglicu, pod uslovom da su sve mogućnosti podjednako verovatne.

<u>Rešenje:</u>

A: “izvučena je bela kuglica”



Broj svih mogućnosti dobijamo kad saberemo sve kuglice, dakle $n = 62$.

Nama je povoljno da izvučemo belu kuglicu, a pošto ih ima 12, to je $m = 12$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{62} = \frac{6}{31}$$

$\boxed{PRIMER\ 6.}$

Nepismeno dete sastavlja reči od sledećih slova: a,a,a,e,i,k,m,m,t,t. Odrediti verovatnoću da će sastaviti reč “matematika”.

<u>Rešenje:</u>

Ovaj zadatak ćemo rešiti na dva načina.

I način

Koristimo klasičnu definiciju verovatnoće:

A: “sastavljena je reč matematika”

Broj svih mogućnosti je ustvari broj svih permutacija od ovih 10 slova, ali sa ponavljanjem , jer se slovo <u>a</u> ponavlja 3 puta, slovo <u>m</u> - 2 puta i slovo <u>t</u> - 2 puta.

$$n=\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=151200$$

Od svih mogućnosti, nama je povoljna samo jedna, da reč bude matematika, pa je $m=1$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{151200}$$

II način

Ovaj način je više logički, ići ćemo slovo po slovo:

Najpre od ovih deset slova biramo slovo m, verovatnoća tog događaja je $\frac{2}{10}$, jer imamo 10 slova a 2 su m.

a a a e l k ~~m~~ m t t

Dalje nam treba slovo a. Verovatnoća da ćemo uzeti a od preostalih 9 slova je $\frac{3}{9}$, jer imamo 3 slova a.

~~a~~ a a e l k ~~m~~ m t t

Znači, za sad imamo $\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}$. Idemo dalje, biramo slovo t od preostalih 8 slova. Tu je verovatnoća $\frac{2}{8}$.

~~a~~ a a e l k ~~m~~ m ~~t~~ t

Imamo dakle za sada $\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}$.

Napravili smo mat , sledeće slovo koje nam treba je e, a njega uzimamo sa verovatnoćom $\frac{1}{7}$, jer su ostala 7 slova a imamo samo jedno e.

~~a~~ a a ~~e~~ l k ~~m~~ m ~~t~~ t

Sledeći ovaj postupak (nadam se da smo ukapirali) , dobijamo:

$$P(A)=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 \quad \text{odnosno} \quad P(A)=\frac{1}{151200}$$

$\boxed{\textit{PRIMER 7.}}$

U kutiji se nalaze 3 žute, 4 crvene i 5 plave kuglice. Izvlačimo 3 kuglice ali na različite načine:

i) sve tri odjednom
ii) jednu po jednu sa vraćanjem
iii) jednu po jednu bez vraćanja

Odrediti verovatnoću da su izvučene:

a) sve tri crvene kuglice
b) 2 plave i jedna žuta
c) sve tri kuglice različite boje.

<u>Rešenje:</u>

Pazite, zavisno od načina na koji izvlačimo kuglice, koristimo različite formule iz kombinatorike!

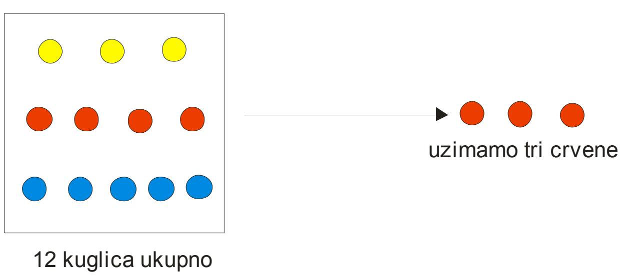
Ako uzimamo sve kuglice odjednom, koristimo kombinacije C_k^n.

Ako uzimamo kuglice jednu po jednu sa vraćanjem , koristimo $\overline{V}_k^n$.

Ako uzimamo kuglice jednu po jednu bez vraćanja , koristimo V_k^n

a) sve tri crvene kuglice

A: “izvučene su tri crvene kuglice”



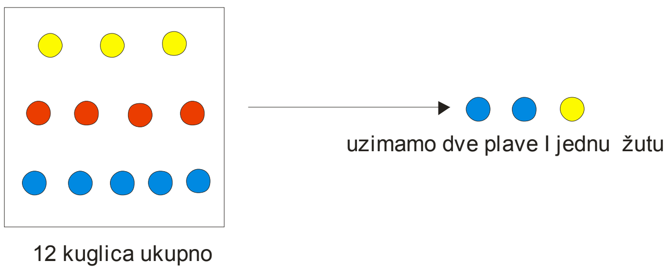
i) $P(A)=\dfrac{C_3^4}{C_3^{12}}=\dfrac{4}{220}=\dfrac{1}{55}$ sve tri odjednom

ii) $P(A)=\dfrac{\overline{V}_3^4}{\overline{V}_3^{12}}=\dfrac{4^3}{12^3}=\left(\dfrac{4}{12}\right)^3=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$ jedna po jedna sa vraćanjem

iii) $P(A)=\dfrac{V_3^4}{V_3^{12}}=\dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{12\cdot 11\cdot 10}=\dfrac{1}{55}$ jedna po jedna bez vraćanja

b) 2 plave i jedna žuta

B: “izvučene su 2 plave i jedna žuta kuglica”

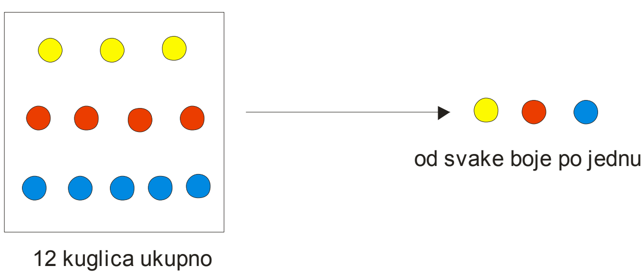


i) $P(B)=\dfrac{C_2^5\cdot C_1^3}{C_3^{12}}=\dfrac{10\cdot 3}{220}=\dfrac{3}{22}$ sve tri odjednom

ii) $P(B)=\dfrac{\overline{V}_2^5\cdot \overline{V}_1^3}{\overline{V}_3^{12}}=\dfrac{5^2\cdot 3^1}{12^3}=\dfrac{25\cdot 3}{12\cdot 12\cdot 12}=\dfrac{25}{576}$ jedna po jedna sa vraćanjem

iii) $P(B)=\dfrac{V_2^5\cdot V_1^3}{V_3^{12}}=\dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{12\cdot 11\cdot 10}=\dfrac{1}{22}$ jedna po jedna bez vraćanja

c) sve tri kuglice različite boje.



C: “izvučene su sve tri kuglice različite boje”

i) $P(C)=\dfrac{C_1^3\cdot C_1^4\cdot C_1^5}{C_3^{12}}=\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{220}=\dfrac{3}{11}$ sve tri odjednom

ii) $P(C)=\dfrac{\overline{V}_1^3\cdot \overline{V}_1^4\cdot \overline{V}_1^5}{\overline{V}_3^{12}}=\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{12^3}=\dfrac{5}{144}$ jedna po jedna sa vraćanjem

iii) $P(C)=\dfrac{V_1^3\cdot V_1^4\cdot V_1^5}{V_3^{12}}=\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{12\cdot 11\cdot 10}=\dfrac{1}{22}$ jedna po jedna bez vraćanja

$\boxed{\textit{PRIMER 8.}}$

Kocka, čije su sve površi obojene, izdeljena je na hiljadu kocaka jednakih dimenzija. Tako dobijene kocke su izmešane. Odrediti verovatnoću da će nasumice izabrana kocka imati dve obojene površi.

Rešenje:

Događaj A: «izvučena je kockica sa dve obojene površine»

Pošto imamo hiljadu kockica, očigledno je $n = 1000$

Kako **kocka ima 12 ivica** a svaka ivica sadrži po 10 kockica i znamo da ivice na uglovima imaju sve tri obojene strane, ispada da za svaku ivicu imamo po 10 - 2 = **8 kockica sa po dve obojene strane.**

Onda je broj kockica sa dve obojene strane $m = 12 \cdot 8 = 96$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{96}{1000} = 0,096$$

$\boxed{\textit{PRIMER 9.}}$

Iz špila od 32 karte nasumice su izvučene tri karte odjednom.

a) Naći verovatnoću da je među njima tačno jedan AS
b) Naći verovatnoću da će među biti bar jedan AS

Rešenje:

a) Naći verovatnoću da je među njima tačno jedan AS

Događaj A: « izvučen je tačno jedan AS »

Broj svih mogućnosti je da od 32 karte uzmemo 3: $\boxed{C_3^{32}}$

Broj povoljnih mogućnosti je da bude 1 AS: $\boxed{C_1^4}$ jer imamo 4 ASA, a preostale dve karte mogu biti bilo koje: $\boxed{C_2^{28}}$

$$P(A) = \frac{C_1^4 \cdot C_2^{28}}{C_3^{32}} = \frac{4 \cdot \frac{\cancel{28} \cdot 27}{\cancel{2} \cdot 1}}{\frac{32 \cdot 31 \cdot \cancel{30}}{\cancel{3 \cdot 2} \cdot 1}} = \frac{4 \cdot 14 \cdot 27}{32 \cdot 31 \cdot 5} \approx 0,30$$

b) Naći verovatnoću da će među biti bar jedan AS

Događaj B: « izvučen je bar jedan AS »

U ovakvim situacijama smo rekli da je pametno naći verovatnoću suprotnog događaja , pa to oduzeti od jedinice.

Suprotan događaj događaju B bi bio da nije izvučen nijedan AS.

$$P(\overline{B})=\frac{C_3^{28}}{C_3^{32}}=\frac{\dfrac{28\cdot 27\cdot 26}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}}}{\dfrac{32\cdot 31\cdot 30}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}}}=\frac{28\cdot 27\cdot 26}{32\cdot 31\cdot 30}\approx 0,66$$

$$P(B)=1-P(\overline{B})\approx 1-0,66\approx 0,34$$