VEROVATNOĆA - ZADACI (I DEO)

U računu verovatnoće osnovni pojmovi su **opit** i **događaj**.

Svaki opit se završava nekim ishodom koji se naziva **elementarni događaj**.

Elementarne događaje profesori različito obeležavaju, mi ćemo ih obeležiti sa $e_1, e_2, e_3, ...$ a vi naravno radite kako kaže vaš profesor.

Skup svih mogućih ishoda datog opita, odnosno skup svih elementarnih događaja se najčešće obeležava sa E .

$$E = \{e_1, e_2, e_3, ... e_n\}$$

$\boxed{\text{primer 1.}}$

Odrediti skup svih elementarnih događaja za sledeće opite:

a) bacanje jednog dinara
b) bacanje dva dinara
c) bacanje tri dinara
d) bacanje jedne kocke
e) bacanje dve kocke
f) bacanje tri kocke

<u>Rešenja:</u>

a) bacanje jednog dinara

Naravno, prilikom bacanja dinara može pasti **pismo** ili može pasti **grb**. P G

Ako sa e_1 obeležimo pojavu pisma na gornjoj strani novčića a sa e_2 obeležimo pojavu grba onda je

skup svih elementarnih događaja ovog opita $E = \{e_1, e_2\}$, a mislimo da je bolje ovo obeležiti sa $E = \{P, G\}$.

b) bacanje dva dinara

Na gornjoj strani novčića se može pojaviti:

P P

P G

G P

G G

Pa je $E = \{PP, PG, GP, GG\}$, odnosno ima 4 ishoda ovog opita.

c) bacanje tri dinara

Ako bacamo tri novčića, broj ishoda je 8. Da vidimo:

P	P	P		G	G	G
P	P	G		G	G	P
P	G	P		G	P	G
P	G	G		G	P	P

$E = \{PPP, PPG, PGP, PGG, GGG, GGP, GPG, GPP\}$

d) bacanje jedne kocke

Većina nas je igrala "ne ljuti se čoveče" ili neku sličnu igricu sa jednom kockicom...

Na gornjoj strani kocke može pasti jedan od brojeva :

1	2	3	4	5	6

pa je skup svih elementarnih događaja : $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Jasno je da ih ima 6. Preko formula iz kombinatorike bi ovo izračunali kao varijacije sa ponavljanjem: $\overline{V}_1^6 = 6^1 = 6$

e) bacanje dve kocke

Pri bacanju dve kockice, broj mogućih ishoda je veći: $\overline{V}_2^6 = 6^2 = 36$

Naš savet je da uvek kad je to moguće, odnosno kad ne zahteva previše pisanja, ispišete sve mogućnosti opita:

1	1		2	1		3	1		4	1		5	1		6	1
1	2		2	2		3	2		4	2		5	2		6	2
1	3		2	3		3	3		4	3		5	3		6	3
1	4		2	4		3	4		4	4		5	4		6	4
1	5		2	5		3	5		4	5		5	5		6	5
1	6		2	6		3	6		4	6		5	6		6	6

$E = \{11, 12, 13, ..., 66\}$

f) bacanje tri kocke

Broj svih elementarnih događaja je $\overline{V}_3^6 = 6^3 = 216$. E ovde bi već bilo preterano da pišemo redom sve moguće ishode.

$E = \{111,112,113,.......,666\}$

Bitno je da znamo koliko ih ukupno ima.

E sad, u zadacima mi moramo obavezno odrediti skup svih elementarnih događaja, a oni od nas traže da nađemo verovatnoću pojave jednog od njih (ili više njih...).

Jedan takav događaj se najčešće obeležava slovima latinice: A,B,C...

Slučajan događaj A je podskup skupa E elementarnih događaja.

Mi moramo precizno, navodnicima da opišemo taj događaj A= "…….".

Ako smo sigurni da neki opit izaziva pojavu događaja A, onda za događaj A kažemo da je **pouzdan**.

Ako se događaj A sigurno ne realizuje datim opitom, onda se on naziva **nemoguć**. (obeležava se sa $\varnothing$)

Na primer, kad bacamo jednu kockicu , sigurni smo da će se na gornjoj strani pojaviti jedan od brojeva 1,2,3,4,5,6 a ako obeležimo u tom opitu da je događaj A: " pojavio se broj 7 na gornjoj strani kockice", sigurni smo da je to nemoguć događaj.

Ako posmatramo dva događaja koji se mogu dogoditi u istom opitu, onda oni mogu biti **zavisni** i **nezavisni**.

Na primer, neka je opit bacanje dve kockice. Posmatramo tri događaja:

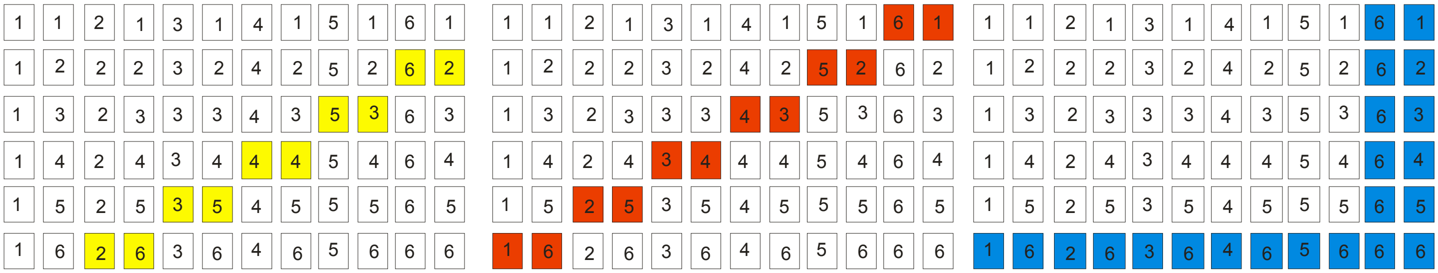
Događaj A: " pao je zbir 8"

Događaj B : " pao je zbir 7"

Događaj C: " pala je bar jedna šestica"

Ispitati da li su ovi događaji međusobno zavisni ili ne.

Ovde je najbolje ispisati sve mogućnosti...



A:"pao je zbir 8"   B:"pao je zbir 7"   C:"pala je bar jedna šestica"

Vidimo da su događaji A i B nezavisni.

Međutim , ako posmatramo događaje A i C, vidimo da su oni zavisni , jer se oba dešavaju kad padne (2,6) i (6,2).

Takođe su i B i C zavisni , jer kod oba događaja imamo (1,6) i (6,1).

Zbir (unija)dva događaja A i B naziva se događaj **A+B** (ili $A \cup B$) koji se sastoji u tome da se realizuje bilo koji od njih, to jest bilo A, bilo B, bilo A i B.

Proizvod (presek) dva događaja A i B se obeležava sa **AB** (ili $A \cap B$) i predstavlja događaj koji se sastoji u tome da se događaji A i B pojavljuju zajedno.

Ako se u vršenju jednog opita **realizacijom događaja A uvek realizuje i događaj B**, tada kažemo da događaj A povlači događaj B i tada je $A \subset B$.

Suprotan događaj događaja A se obeležava sa $\overline{A}$.

Događaji $A_1, A_2, ..., A_n$ obrazuju **potpun sistem događaja** ako je $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$ i $A_i \cap A_j = \varnothing$, to jest dva po dva su isključivi događaji.

Verovatnoća slučajnog događaja A se obeležava sa P(A).

Pravila:

1. $\boxed{0 \le P(A) \le 1}$

Znači, verovatnoća se " meri" od 0 do 1. Nula je verovatnoća nemogućeg događaja a jedinica je verovatnoća sigurnog događaja.

2. $\boxed{P(A)+P(\overline{A})=1}$

Kad saberemo verovatnoću nekog događaja i verovatnoću njemu suprotnog događaja, dobijamo siguran događaj,

odnosno , nešto il će se desi il neće...

Često je u zadacima lakše izračunati verovatnoću suprotnog događaja, pa je onda $\boxed{P(A)=1-P(\overline{A})}$

3. Ako je $\boxed{A \subset B}$ onda je $\boxed{P(A) \le P(B)}$

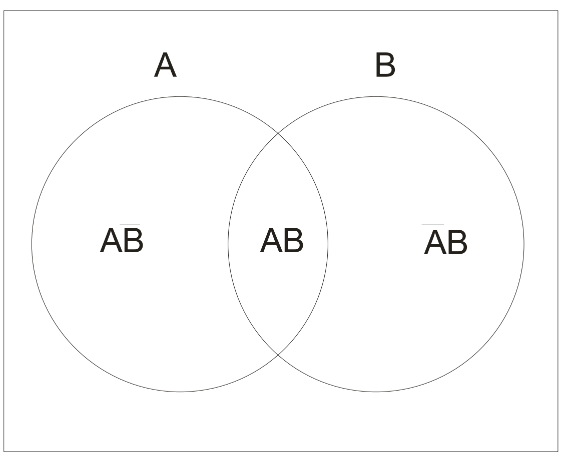
primer 2.

Data su dva događaja A i B. Pomoću simboličkih operacija sa datim događajima odrediti sledeće događaje:

i) realizovan je događaj A a nije realizovan događaj B
ii) realizovan je događaj B a nije realizovan događaj A
iii) realizovana su oba događaja

Rešenja:

Pogledajmo najpre sledeću sliku:



i) realizovan je događaj A a nije realizovan događaj B

To ćemo obeležiti sa $A\overline{B}$, to jest , realizovan je A a nije B.

ii) realizovan je događaj B a nije realizovan događaj A

Ovo možemo obeležiti sa $\overline{A}B$

iii) realizovana su oba događaja

Ovde je rešenje presek, odnosno to je događaj AB

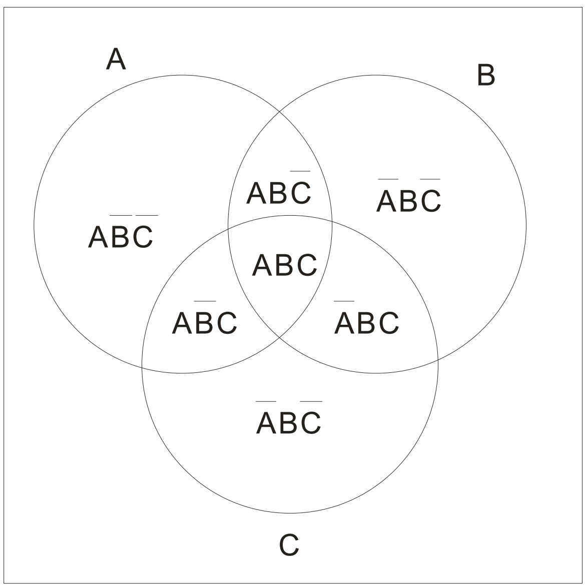
primer 3.

Data su tri događaja A,B i C. Pomoću simboličkih operacija sa datim događajima odrediti sledeće događaje:

a) realizovan je događaj A , a nisu realizovani događaji B i C
b) realizovani su događaji A i C, a događaj B nije
c) realizovana su sva tri događaja
d) realizovan je jedan i samo jedan od ova tri događaja

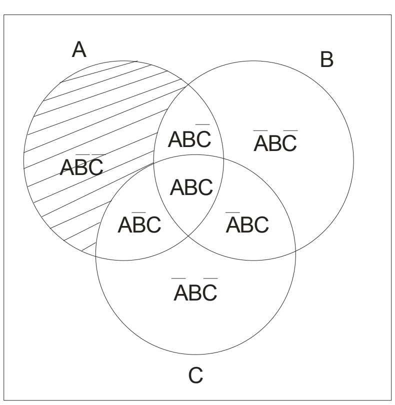
<u>Rešenja:</u>

Pogledajmo opet sliku gde su događaji predstavljeni pomoću skupova:



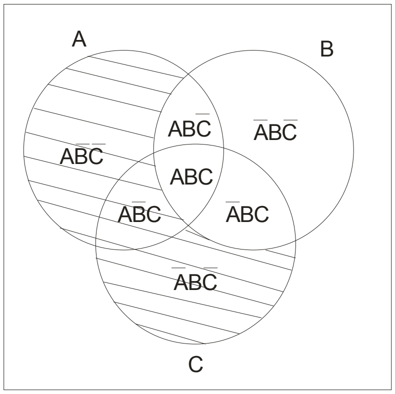
Da odgovorimo sada na postavljena pitanja:

a) realizovan je događaj A , a nisu realizovani događaji B i C



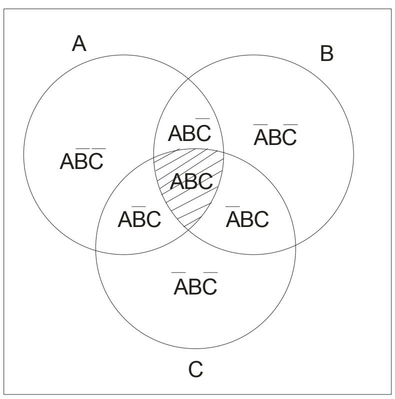
Rešenje je: $A\overline{B}\overline{C}$

b) realizovani su događaji A i C, a događaj B nije



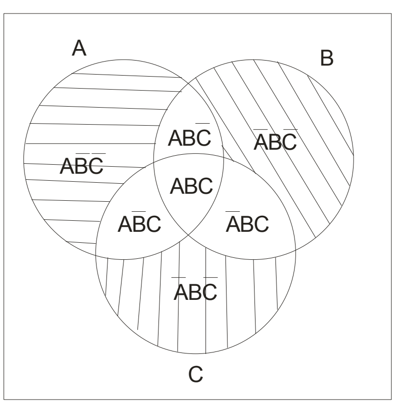
Rešenje je: $A\overline{B}C$ ili možemo zapisati $A\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}C$ (vidi sliku)

c) realizovana su sva tri događaja



Rešenje je: ABC

d) realizovan je jedan i samo jedan od ova tri događaja



Rešenje je: $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$

Pomenimo još neka pravila:

Ako je A proizvoljan događaj , tada je :

i) $A\varnothing = \varnothing$

ii) $AA = A$

iii) $AE = A$

iv) $A\overline{A} = \varnothing$

v) $A + \varnothing = A$

vi) $A + A = A$

vii) $A + \overline{A} = E$

viii) $A + E = E$

Ako su A, B i C proizvoljni događaji, tada je:

a) $A + B = B + A$

b) $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$

c) $A(BC) = (AB)C = ABC$

d) $A(B + C) = AB + AC$